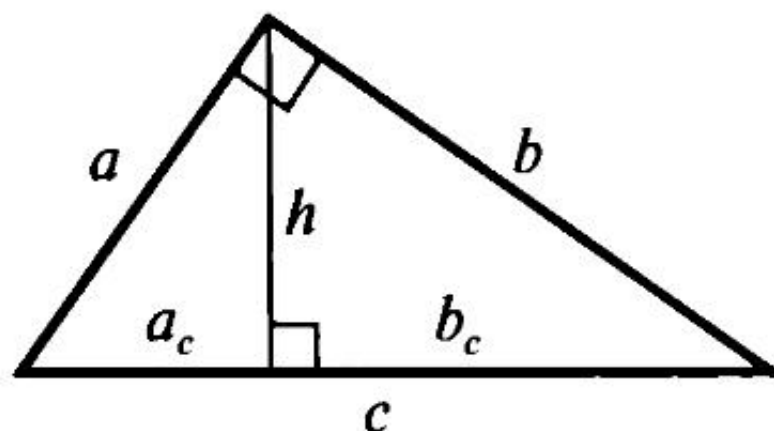


Планиметрия к экзамену

СВОЙСТВА ПРОЕКЦИЙ КАТЕТОВ



Каждый катет является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу:

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \dots \Rightarrow a^2 = a_c c$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = b_c c.$$

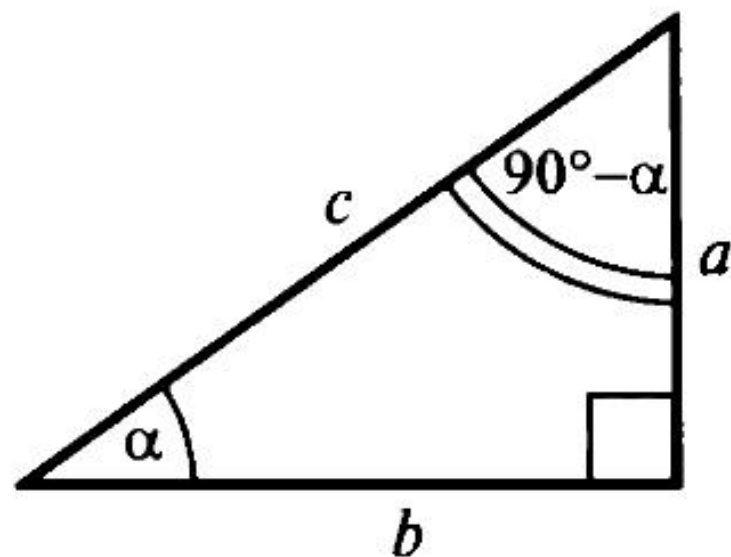
Высота, опущенная на гипотенузу, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу:

$$\frac{a_c}{h} = \frac{h}{b_c} \Rightarrow h^2 = a_c b_c.$$

Высота выражается через стороны и проекции катетов:

$$h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{a_c + b_c}.$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



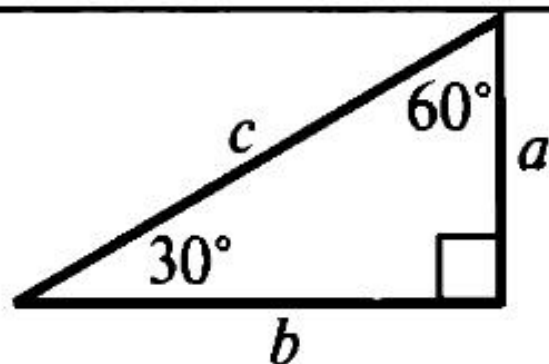
$$\frac{a}{c} = \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$$

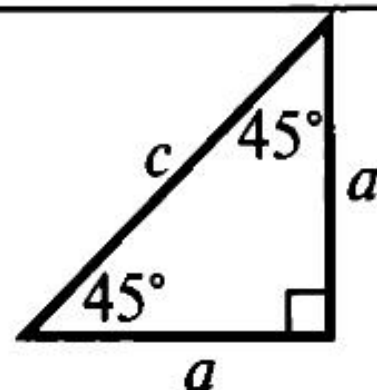
$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$$a = \frac{c}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}c}{2}$$



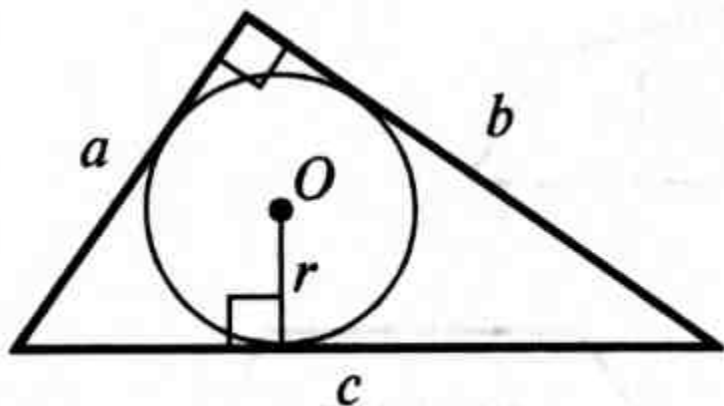
$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{ab}{a + b + c},$$

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

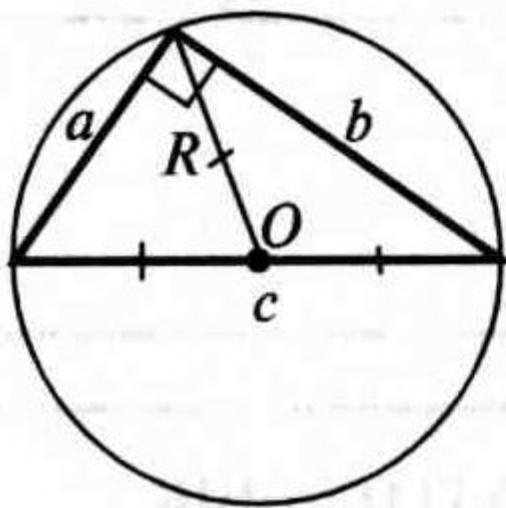


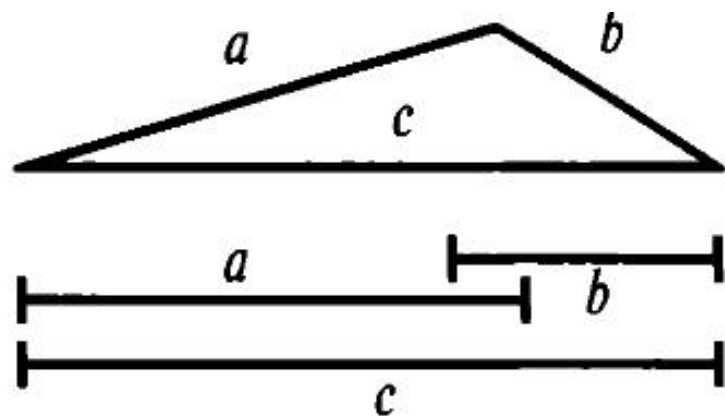
ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Центр описанной окружности
совпадает с серединой гипотенузы,
а радиус равен
— половине гипотенузы:

$$R = \frac{c}{2}$$

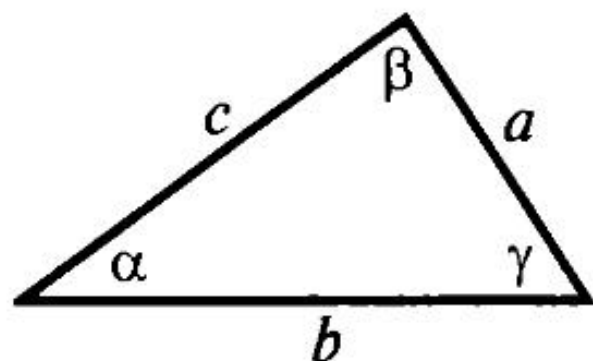
— медиане, проведенной
к гипотенузе: $R = m_c$.



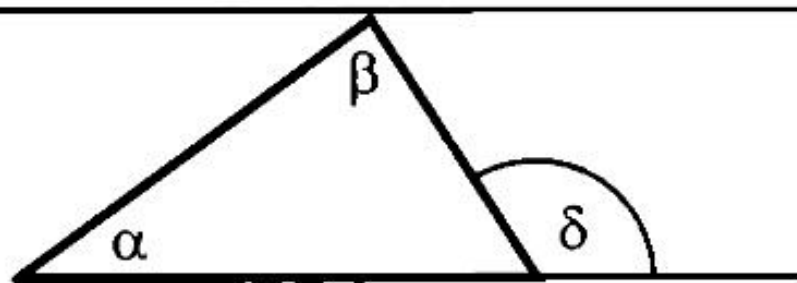


Неравенство треугольника
Любая сторона треугольника
меньше суммы
двух других сторон,
но больше модуля
их разности:

$$|a - b| < c < a + b.$$

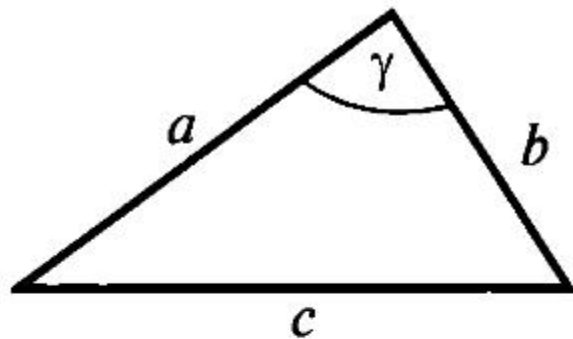


Сумма углов треугольника равна
 180° : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
Против большей стороны
в треугольнике лежит больший
угол: $b > a \Leftrightarrow \beta > \alpha$



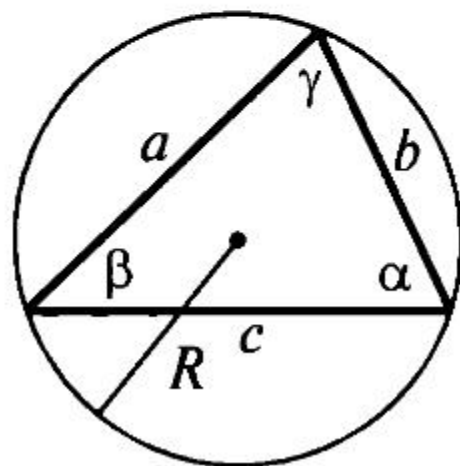
Внешний угол треугольника равен
сумме двух внутренних углов, не
смежных с ним:

$$\delta = \alpha + \beta.$$



Теорема косинусов:

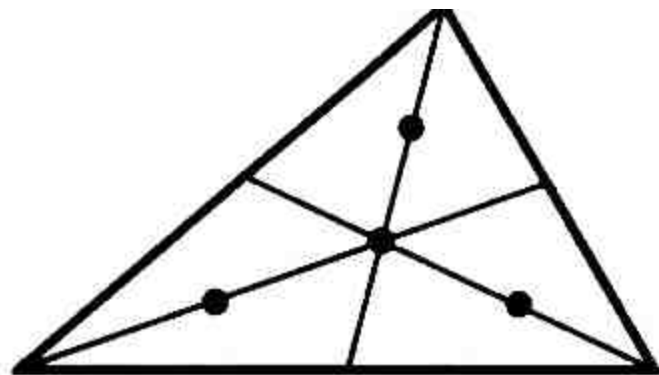
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



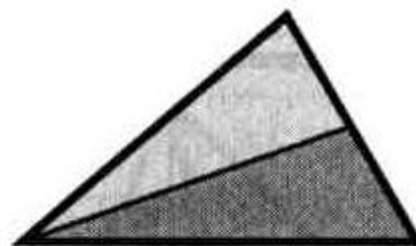
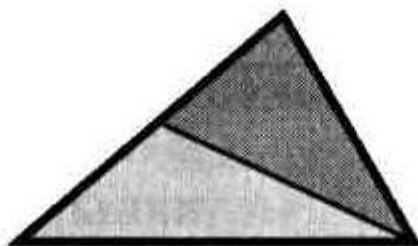
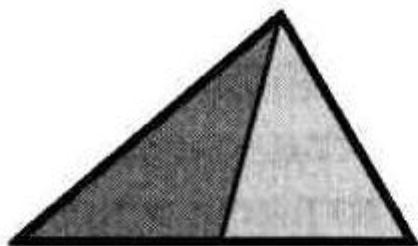
Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

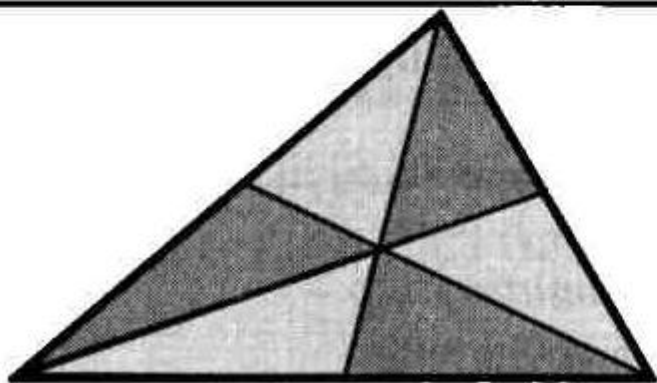
Это отношение равно $2R$,
где R – радиус
описанной окружности.



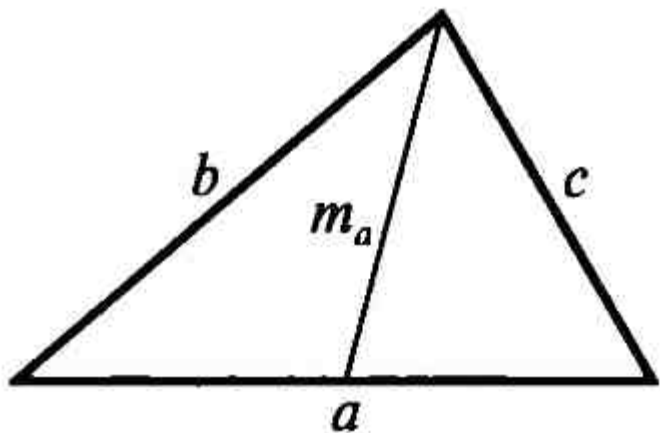
Каждая медиана точкой пересечения медиан делится в отношении 2 : 1, считая от вершины.



Каждая медиана делит треугольник на 2 равновеликих треугольника (одинаковой площади).

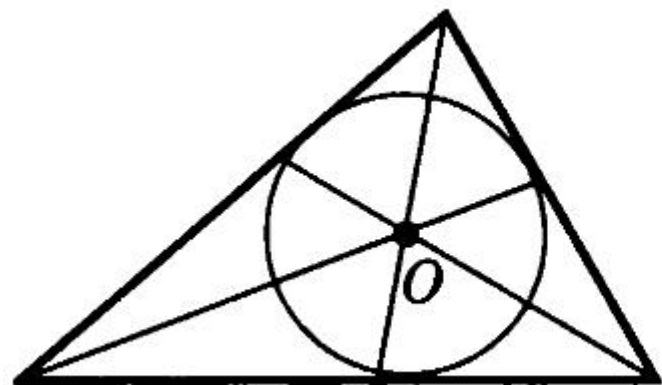


Три медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.

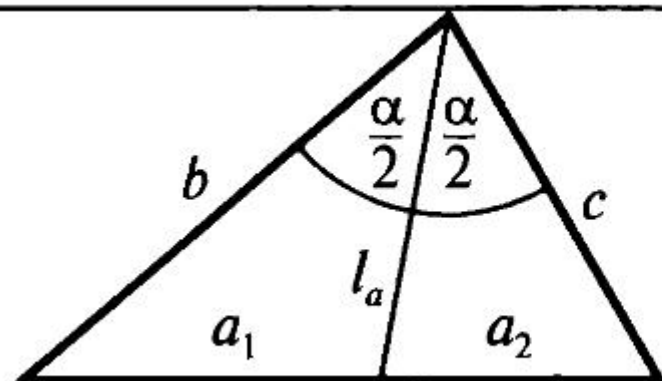


Длина медианы

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

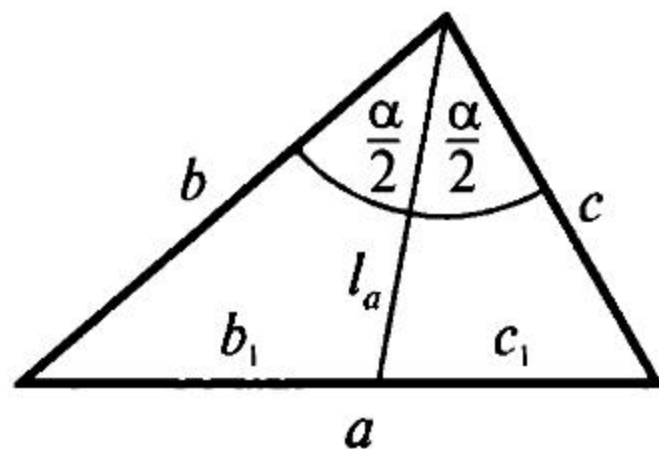


Три биссектрисы пересекаются
в одной точке,
которая всегда лежит
внутри треугольника.
Эта точка является
центром вписанной окружности.



Биссектриса делит сторону тре-
угольника на отрезки, пропорцио-
нальные двум другим сторонам:

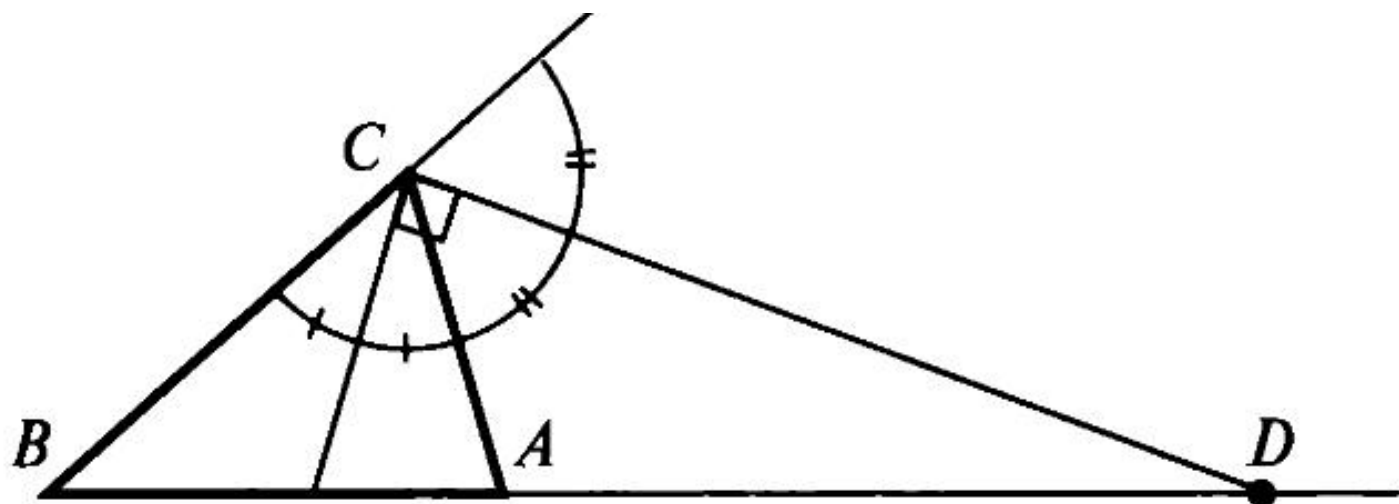
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c}.$$



Длина биссектрисы

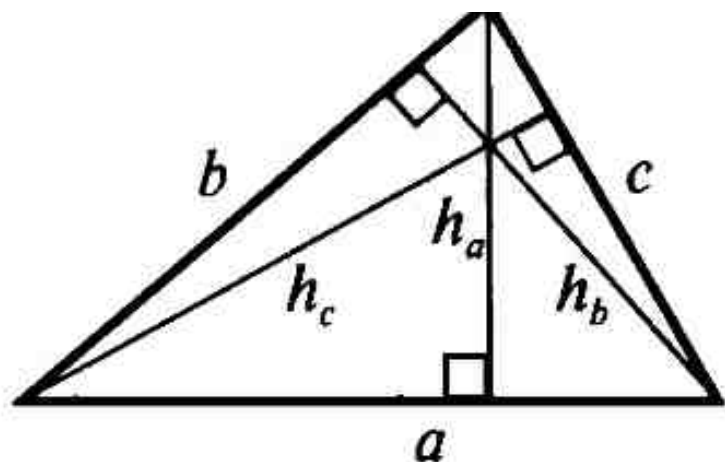
$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b + c}$$

$$l_a^2 = bc - b_1c_1$$



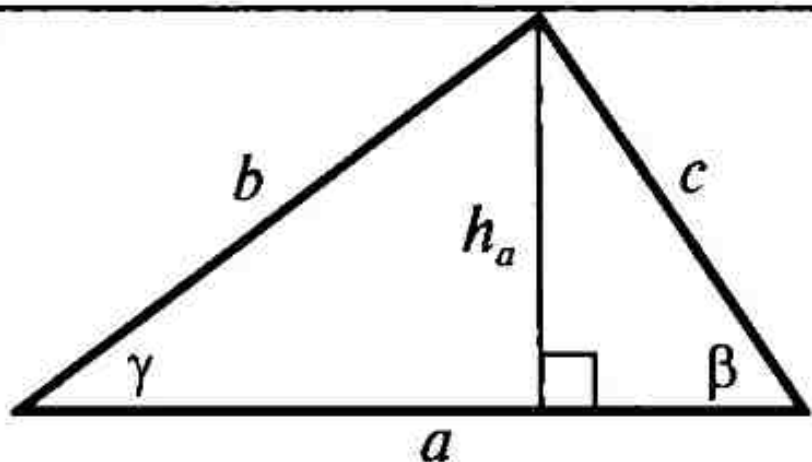
Биссектрисы внутреннего и внешнего углов *перпендикулярны*.

Если биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны, то $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$.



**Высоты треугольника
обратно пропорциональны
его сторонам:**

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$



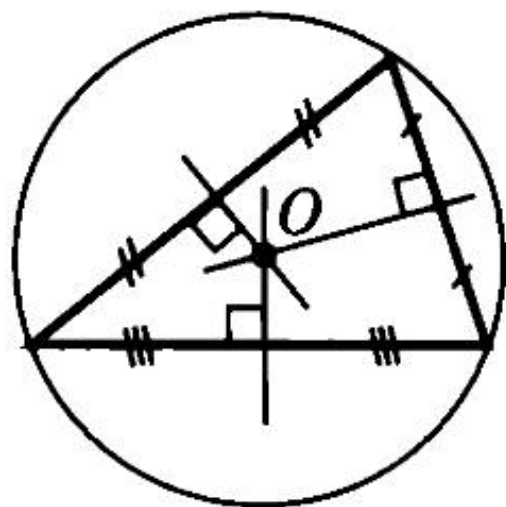
Длина высоты

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta;$$

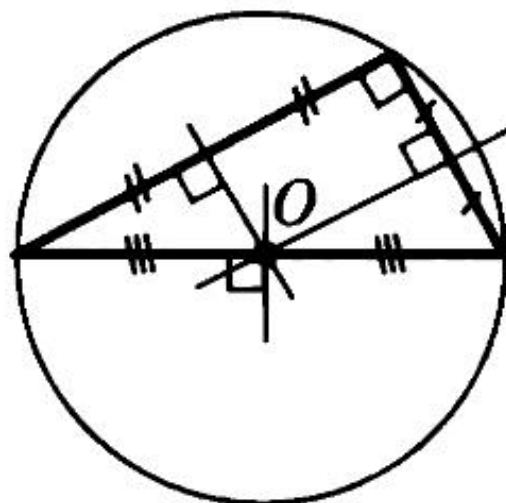
$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

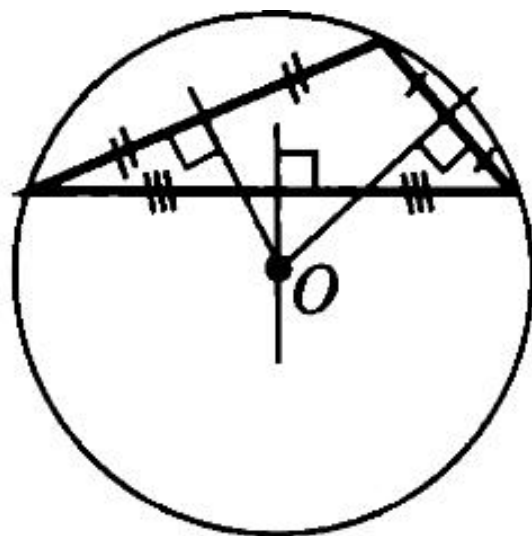
Три серединных перпендикуляра пересекаются в *одной точке*. Эта точка является *центром описанной окружности*.



В случае *остроугольного* треугольника точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности) лежит *внутри* треугольника.

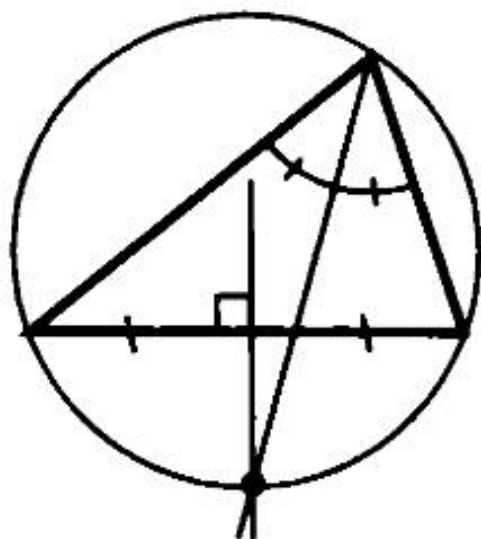


В случае *прямоугольного* треугольника точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности) *совпадает* с *серединой гипотенузы*.



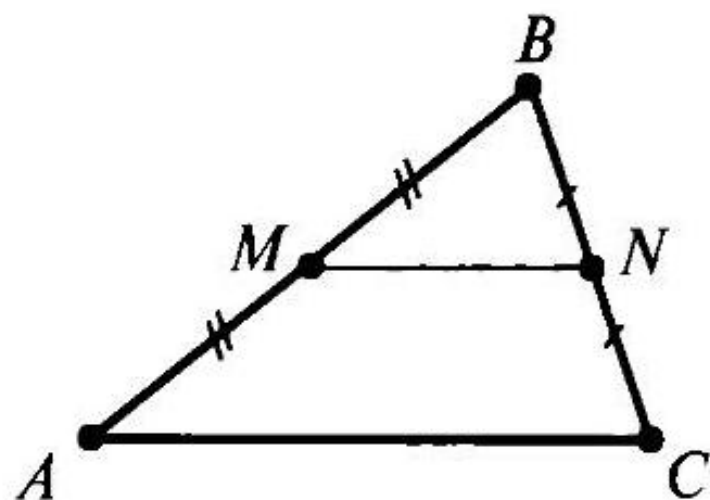
В случае тупоугольного треугольника точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности) лежит *вне* треугольника.

СВОЙСТВО СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА И БИСЕКТРИСЫ



Продолжение биссектрисы пересекается с серединным перпендикуляром в точке, лежащей на окружности, описанной около треугольника.

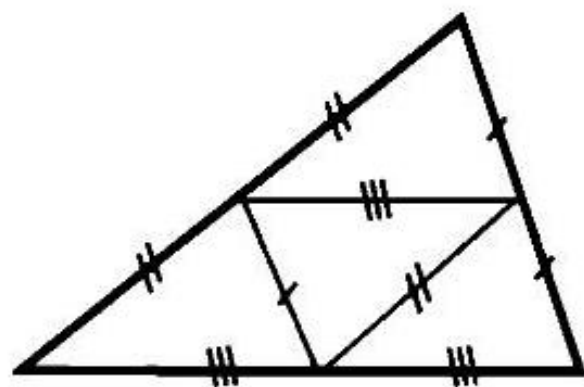
СВОЙСТВА СРЕДНЕЙ ЛИНИИ



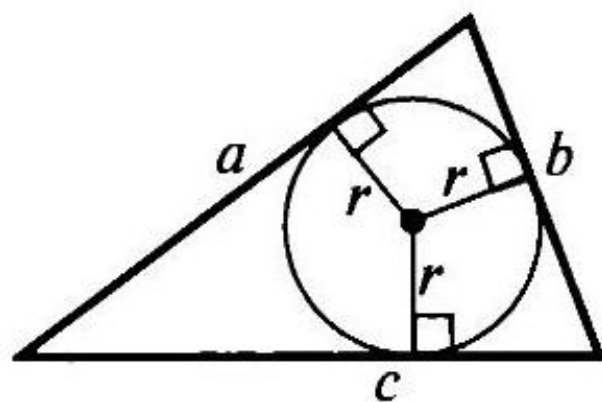
Средняя линия параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине:

$$MN \parallel AC; \quad MN = \frac{1}{2} AC.$$

Она отсекает треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия $1/2$.



Три средние линии треугольника делят его на 4 равных треугольника, подобных данному, с коэффициентом подобия $1/2$.



В любой треугольник

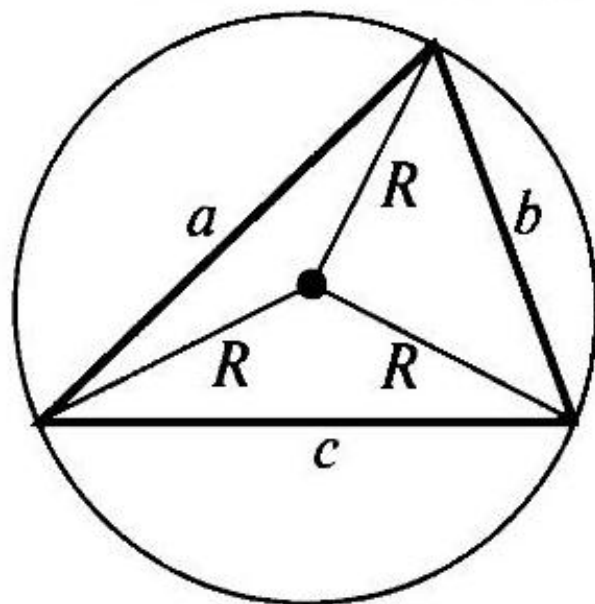
можно *вписать окружность*.

Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис.

Радиус вписанной окружности

$r = S/p$, где S — площадь треугольника,

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$



Около любого треугольника

можно *описать окружность*.

Центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров.

Радиус описанной окружности

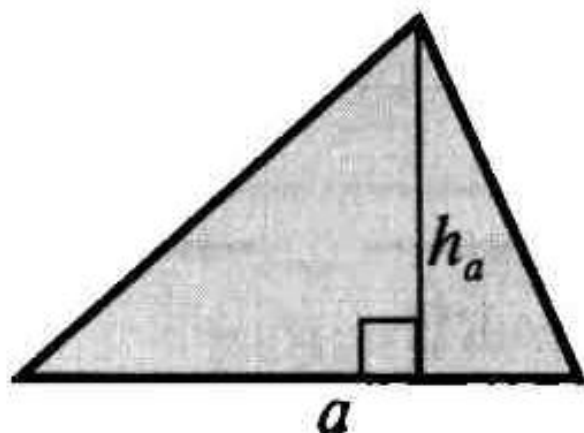
$$R = \frac{abc}{4S},$$

где S — площадь треугольника.

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

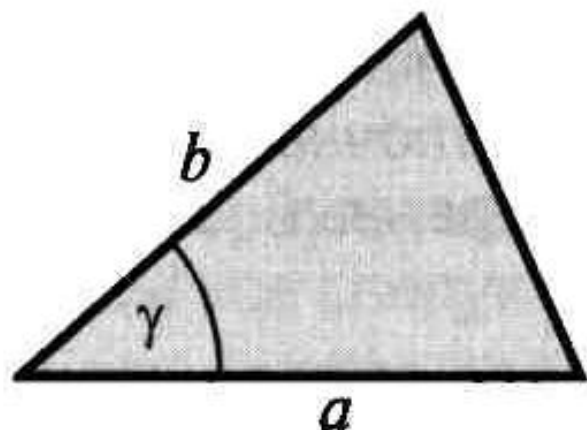
Через сторону и высоту,
проведенную к ней:

$$S = \frac{1}{2} a h_a .$$



Через две стороны и угол между
ними:

$$S = \frac{1}{2} a b \sin \gamma .$$

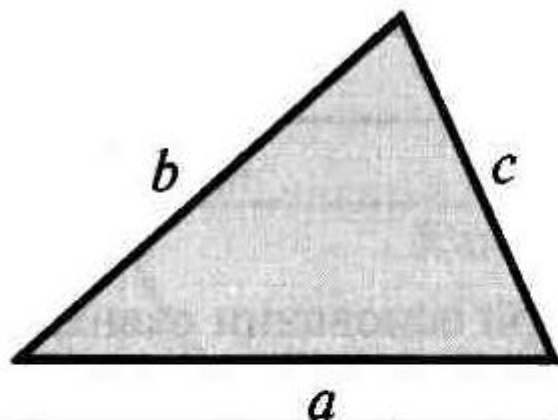


Формула Герона

Через три стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

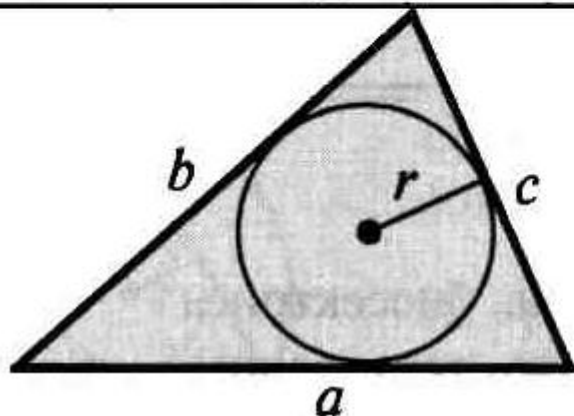
$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$



Через полупериметр и радиус вписанной окружности:

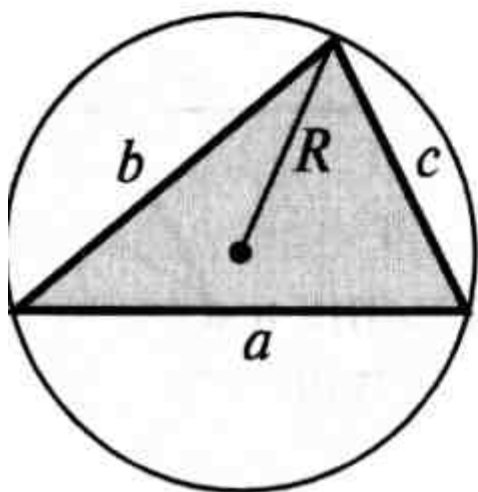
$$S = pr,$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

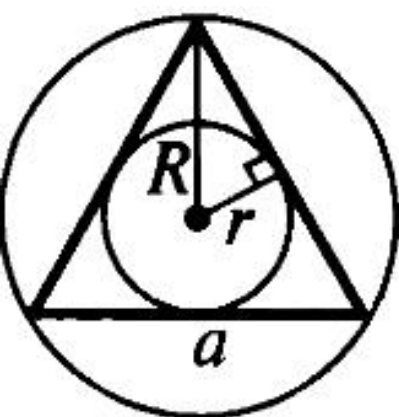


Через произведение сторон
и радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$



СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА

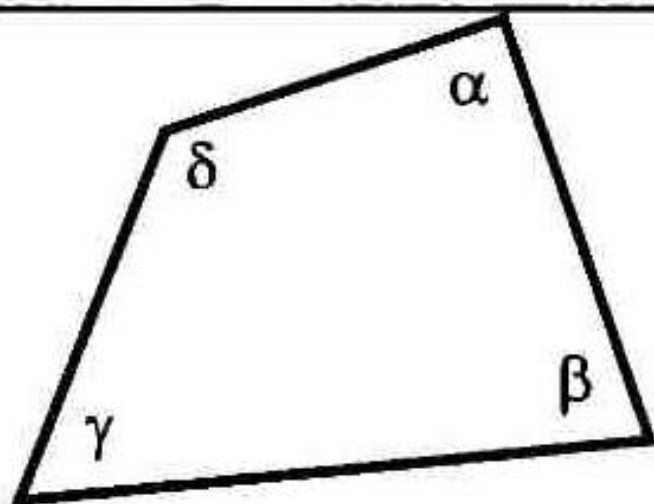


Центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

(Их радиусы: $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $R = 2r$.)

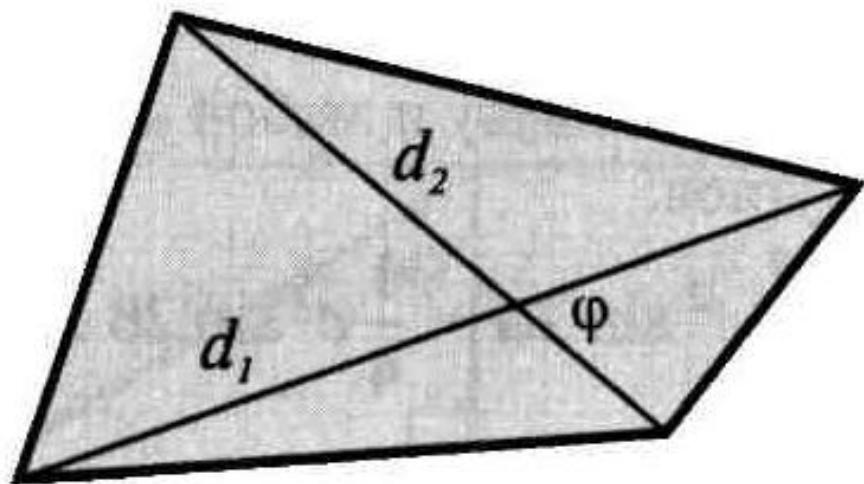
ВЫСОТА И ПЛОЩАДЬ: $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$; $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 3\sqrt{3}r^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$

ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК



Сумма внутренних углов
равна 360° :

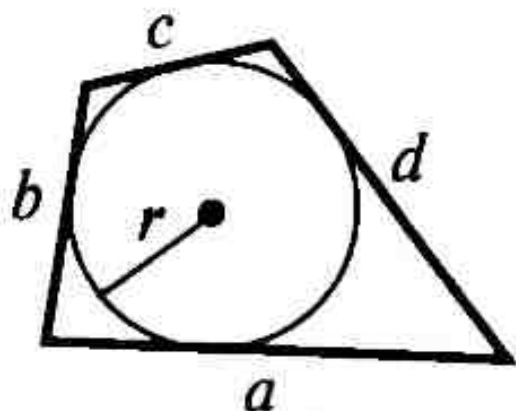
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ.$$



Площадь
(через диагонали
и угол между ними):

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}.$$

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ОКРУЖНОСТИ



Четырехугольник можно описать около окружности, если суммы противоположных сторон равны:

$$a + c = b + d.$$

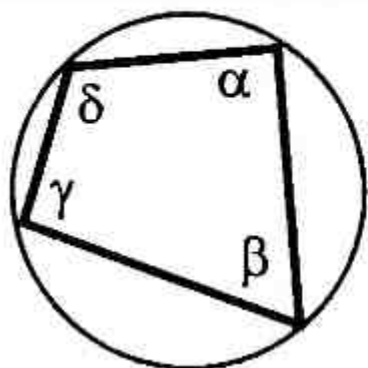
Если четырехугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны.

Площадь: $S = pr$, где $p = \frac{a + b + c + d}{2}$ (полупериметр),

r — радиус вписанной окружности.

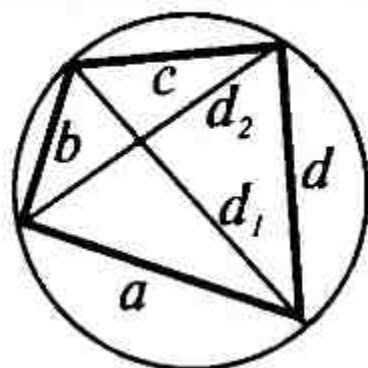
Формула $S = pr$ справедлива для *любого* многоугольника, описанного около окружности.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ВПИСАННЫЙ В ОКРУЖНОСТЬ



Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов равна 180° : $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.

Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы противоположных углов равны 180° .



Теорема Птолемея

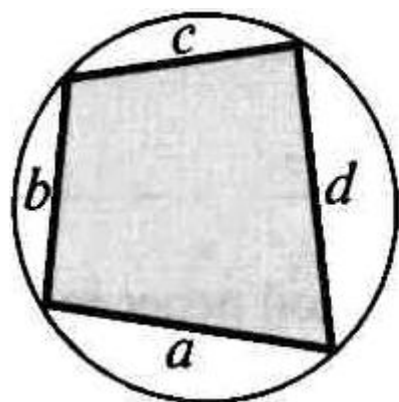
Сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей:

$$ac + bd = d_1 d_2.$$

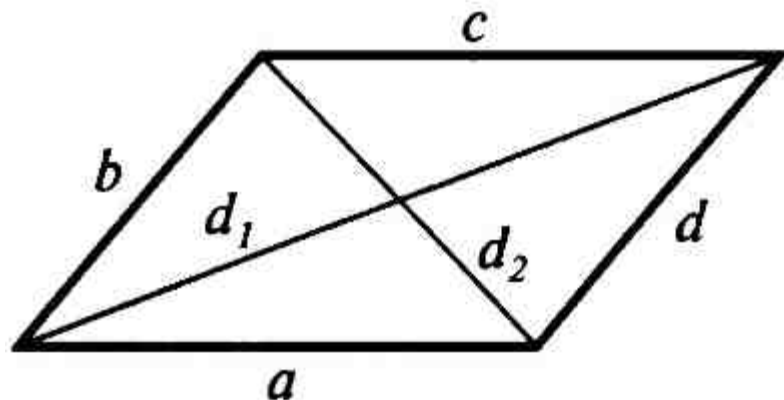
Площадь

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ (полупериметр).

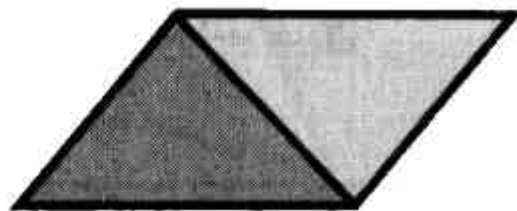
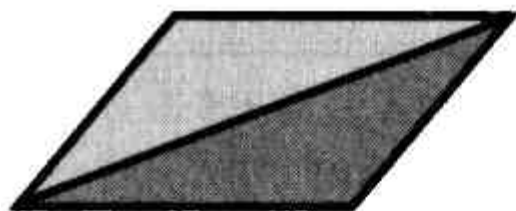


СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

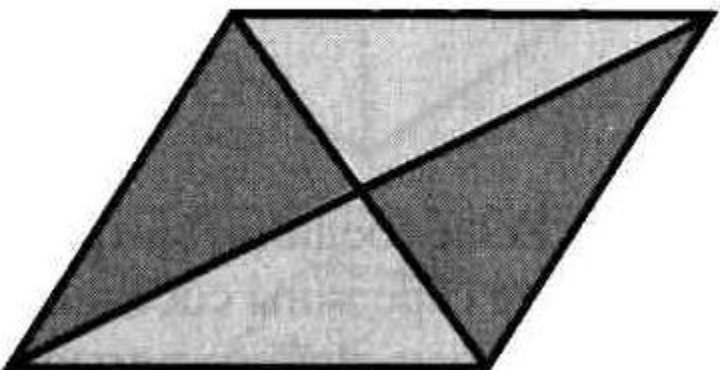


Сумма квадратов диагоналей равна
сумме квадратов
всех сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

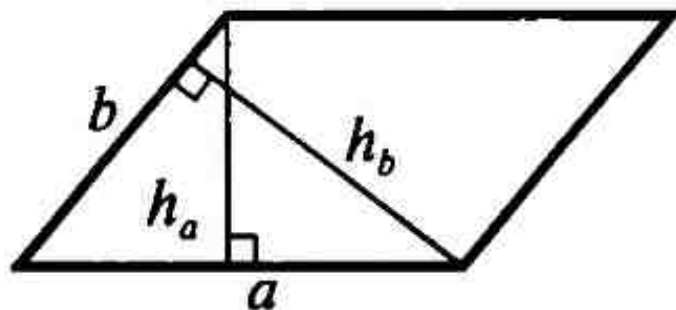


Каждая диагональ делит четырех-
угольник
на два равных треугольника.



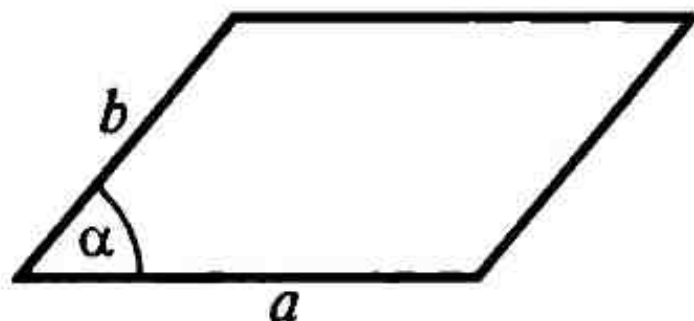
Обе диагонали делят четырех-
угольник
на четыре *равновеликих* треуголь-
ника
(одинаковой площади).

ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА



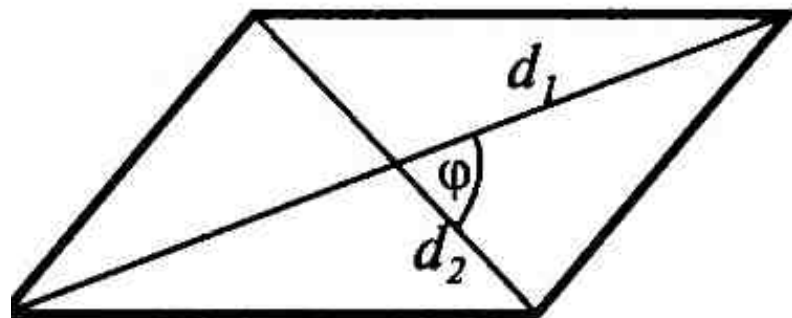
Через сторону
и опущенную на нее высоту:

$$S = ah_a = bh_b.$$



Через две прилежащие стороны
и угол между ними:

$$S = ab \sin \alpha.$$



Через диагонали
и угол между ними:

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}.$$

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В РОМБ

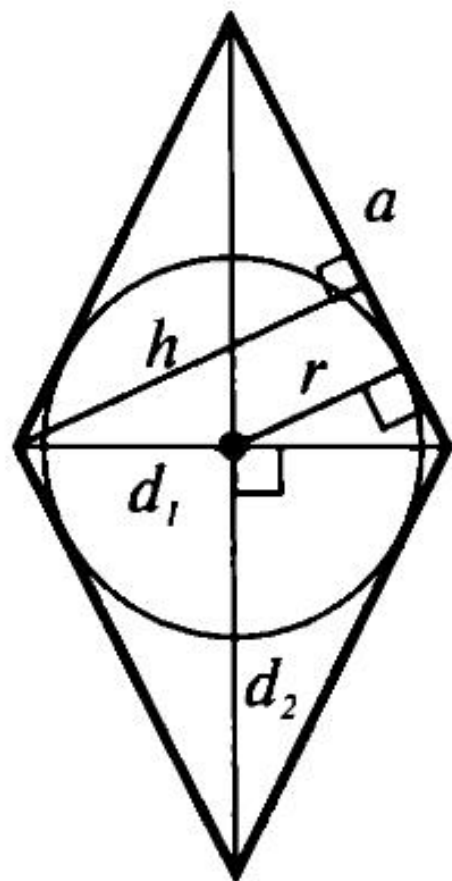
В любой ромб можно вписать окружность. Радиус r вписанной окружности удовлетворяет соотношениям:

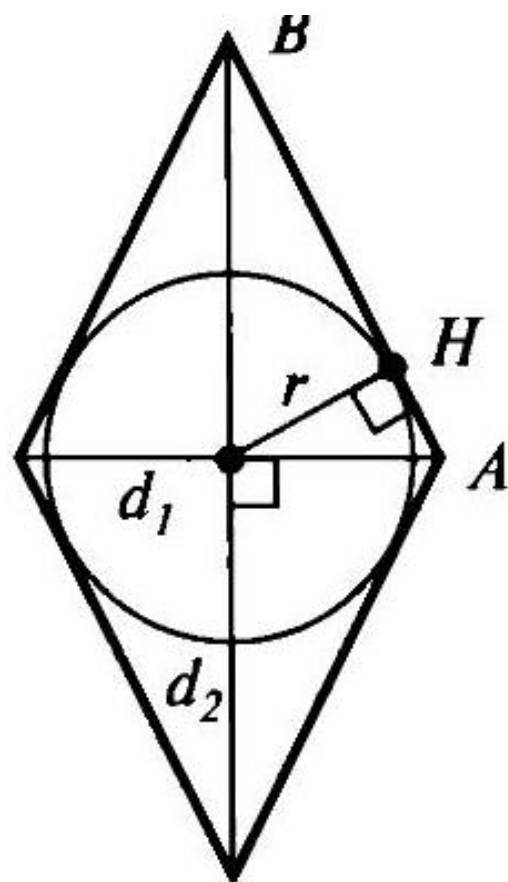
$$r = \frac{h}{2},$$

где h — высота ромба,

$$r = \frac{d_1 d_2}{4a},$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба,
 a — его сторона.



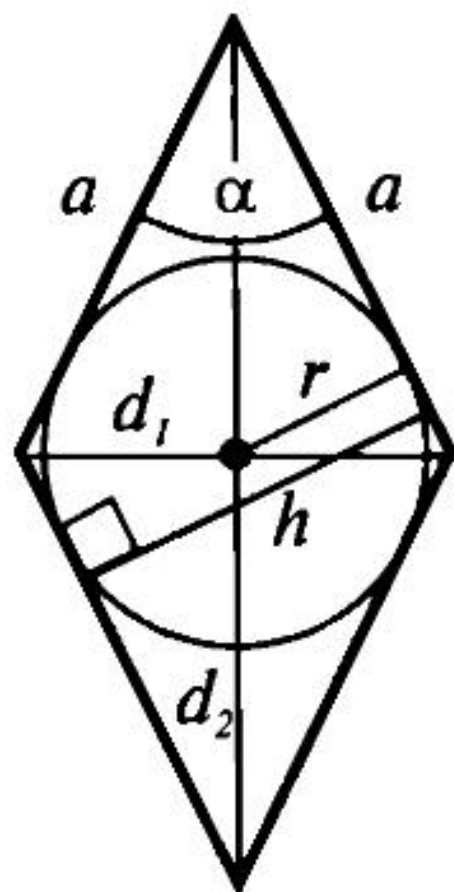


Точка касания вписанной окружности делит сторону ромба на отрезки, связанные с его диагоналями и радиусом вписанной окружности следующими соотношениями:

$$d_1 = 2\sqrt{AH \cdot AB},$$

$$d_2 = 2\sqrt{BH \cdot AB},$$

$$r = \sqrt{AH \cdot HB}.$$



ПЛОЩАДЬ РОМБА

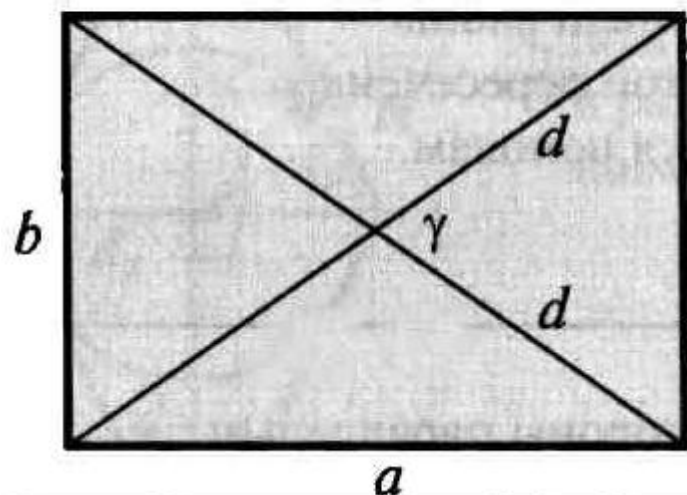
Через сторону и высоту: $S = ah$.

Через сторону
и радиус вписанной окружности:
 $S = 2ar$.

Через сторону и угол ромба:
 $S = a^2 \sin \alpha$.

Через диагонали: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА



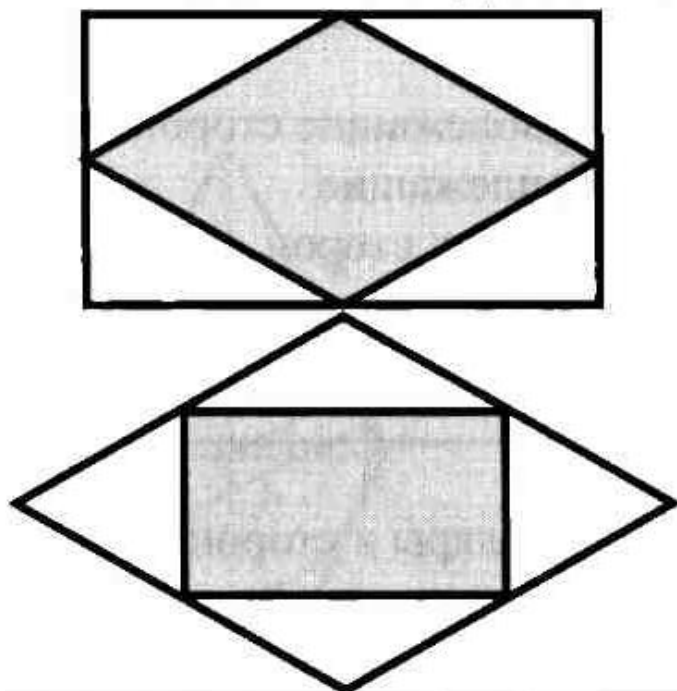
Через стороны:

$$S = ab.$$

Через диагональ и угол между диагоналями:

$$S = \frac{d^2 \sin \gamma}{2}.$$

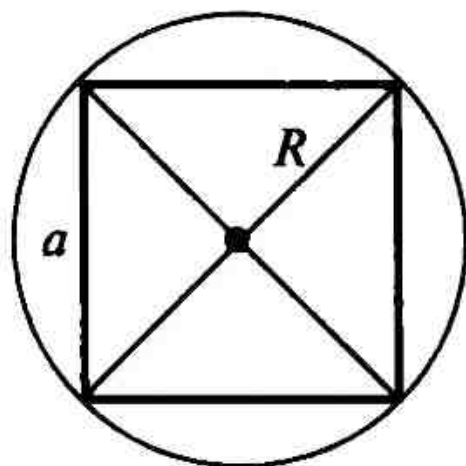
СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ И РОМБОМ



Если соединить отрезками середины соседних сторон любого прямоугольника, получится ромб.

Если соединить отрезками середины соседних сторон любого ромба, получится прямоугольник.

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО КВАДРАТА

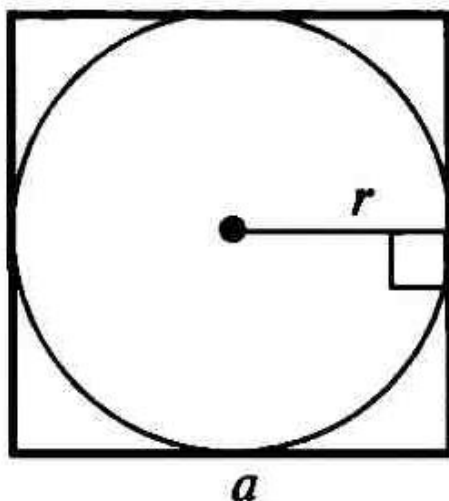


Около квадрата можно описать окружность.

Радиус описанной окружности выражается через сторону a квадрата и его диагональ d следующим образом:

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2}.$$

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В КВАДРАТ

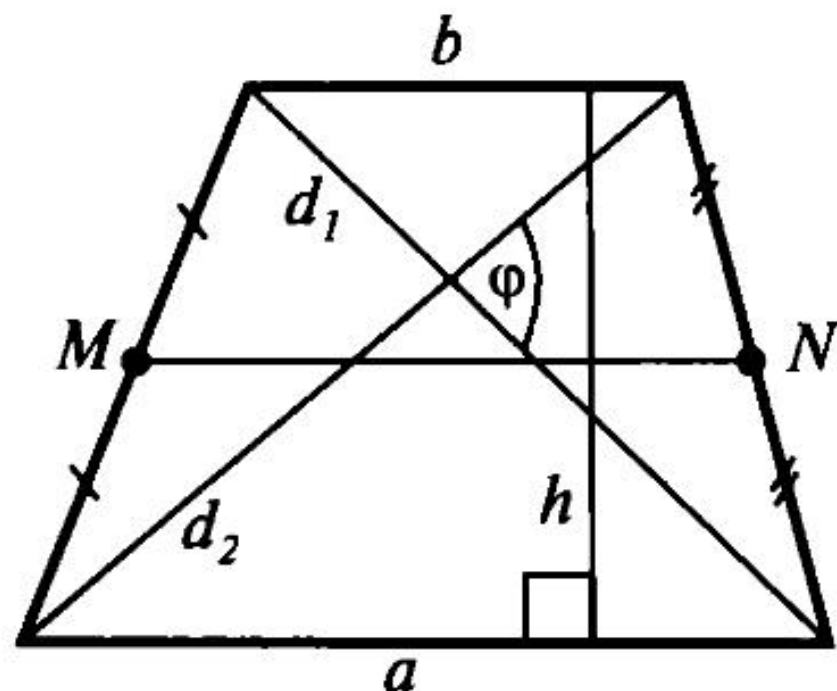


В квадрат можно вписать окружность.

Радиус вписанной окружности равен половине стороны:

$$r = \frac{a}{2}.$$

ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ



Через полусумму оснований
и высоту:

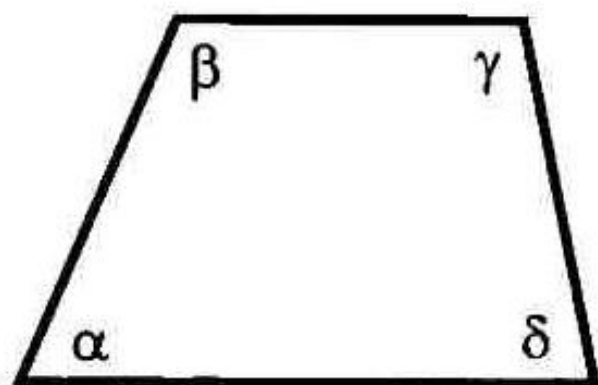
$$S = \frac{a + b}{2} h.$$

Через среднюю линию
и высоту:

$$S = MN \cdot h.$$

Через диагонали
и угол между ними:

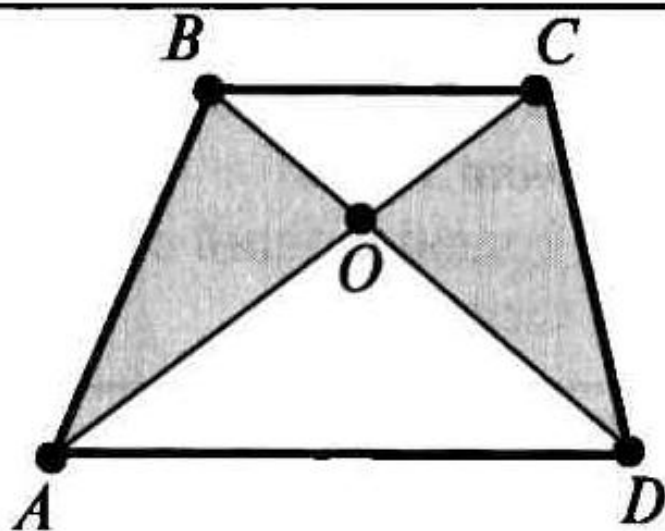
$$S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}.$$



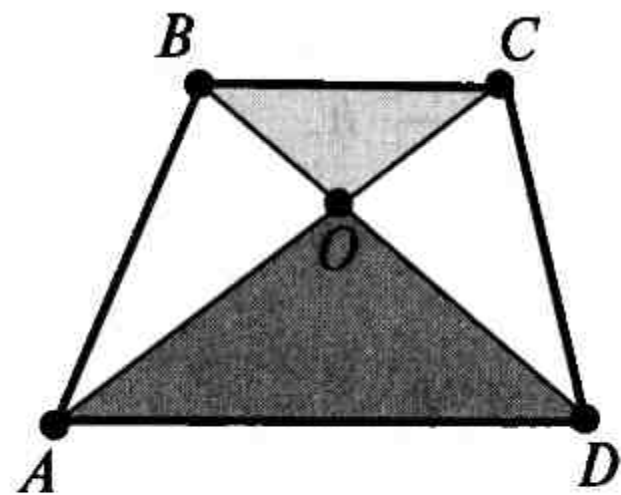
Сумма углов,
прилежащих к любой боковой сторо-
не, равна 180° :

$$\alpha + \beta = 180^\circ,$$

$$\gamma + \delta = 180^\circ.$$



Треугольники
AOB и *DOC*,
образованные боковыми сторонами
и отрезками диагоналей, равновелики
(имеют равные площади).

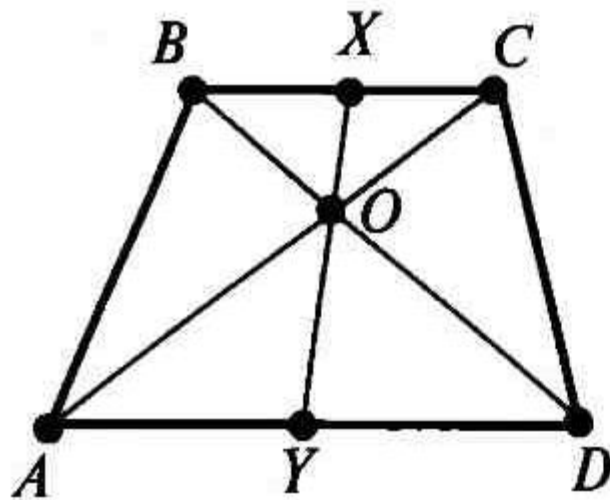


$$\triangle AOD \sim \triangle COB$$

Треугольники AOD и COB , образованные основаниями и отрезками диагоналей, подобны. Коэффициент подобия k равен отношению оснований:

$$k = \frac{AD}{BC}.$$

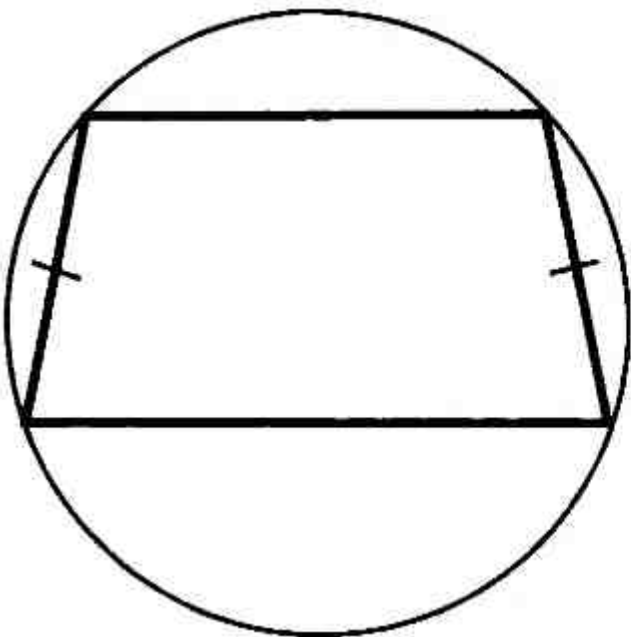
Отношение площадей этих треугольников равно k^2 .



Любой отрезок, соединяющий основания и проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, делится этой точкой в отношении

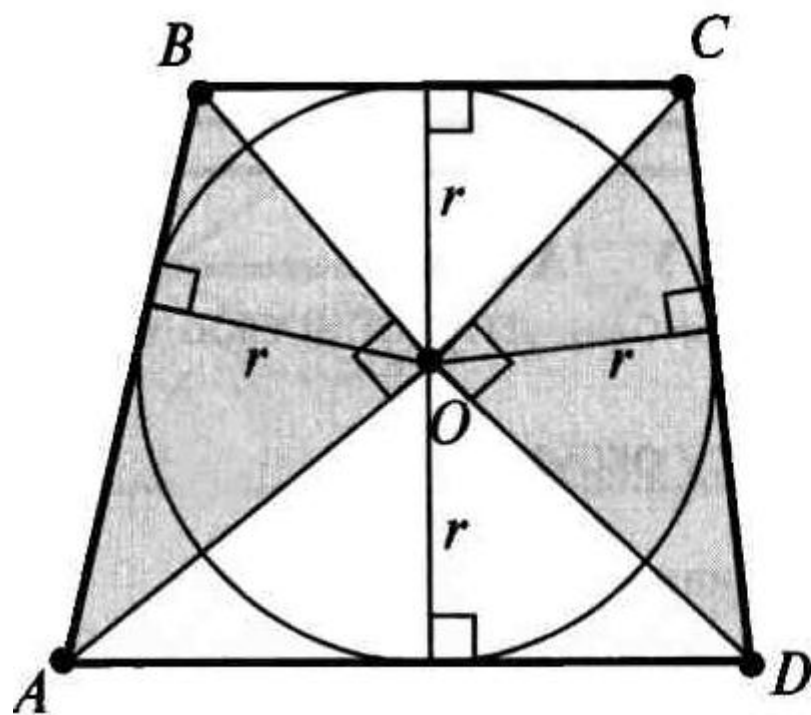
$$\frac{OX}{OY} = \frac{BC}{AD}.$$

Это справедливо, в том числе, для самих диагоналей и высоты.



Любую равнобокую трапецию можно вписать в окружность.

Вписать в окружность можно *только* равнобокую трапецию.



Если трапеция $ABCD$ описана около окружности, то треугольники AOB и DOC прямоугольные (точка O — центр вписанной окружности).

Высоты этих треугольников, опущенные на гипотенузы, равны радиусу вписанной окружности, а высота трапеции равна диаметру вписанной окружности.